ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE DO EGZAMINU MATURALNEGO Z MATEMATYKI

Wybór zadań: mgr Mikołaj Chwaliszewski
Opracowanie graficzne: mgr Karolina Nowak
Korekta: mgr Łucja Kasprowiak

1. LICZBY RZECZYWISTE

1. Oblicz:

a) $\sqrt{(1\frac{1}{4})^2-1}+\sqrt{1+\frac{7}{9}}$ b) $\dfrac{6\frac{3}{7}-5\frac{5}{7}\cdot 1{,}8}{1:(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})}$ c) $(-4)^2-(\sqrt{5})^3-(-3\sqrt{2})^2$

2. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci potęgi o podstawie a $(a \neq 0)$:

a) $\dfrac{(a^2)^7 : a^4}{a^6\cdot a}$ b) $\dfrac{(a^3)^4\cdot(a^2)^5}{(a^4:a^2)^3}$

3. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $(1\frac{1}{5})^5\cdot(1\frac{2}{3})^5$, $(1\frac{4}{5})^4:(0{,}6)^4$, $(18\sqrt{5})^2:(6\sqrt{5})^2$

b) 2^{-3}, $(\frac{2}{5})^{-2}$, $(0{,}2)^{-3}$, $(4\frac{1}{5})^{-1}$

c) $4^{-2}\cdot(\frac{1}{16})^{-2}$, $(1\frac{1}{6})^{-3}\cdot(\frac{3}{7})^{-3}$

4. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $(1\frac{2}{3})^{-9}\cdot(1\frac{2}{3})^7$, $(\frac{3}{7})^{-8}\cdot(2\frac{1}{3})^{-9}$

b) $(\frac{1}{2})^{97}\cdot 2^{100}$, $9^{19}\cdot 3^{-37}$, $6^{20}\cdot 2^{-18}\cdot 3^{-18}$

c) $\dfrac{3\cdot 9\cdot 27\cdot 3^8}{333^0\cdot 3^{11}}$, $\dfrac{49^{12}}{7^2}\cdot(7^3)^{-7}$, $\dfrac{(\frac{1}{8})^{16}\cdot 4^7\cdot 32^7}{2^{-3}}$

5. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

$16^{\frac{1}{4}}$, $25^{-\frac{1}{2}}$, $(\frac{1}{64})^{-\frac{2}{3}}$, $9^{-\frac{3}{2}}$, $(\frac{8}{27})^{-\frac{4}{3}}$

6. Sprawdź czy liczba $\dfrac{4^{\frac{3}{2}}\cdot 32^{\frac{1}{10}}}{3^2\cdot 8^{\frac{5}{6}}}$ jest równa liczbie $\dfrac{3^{\frac{4}{3}}\cdot 2^7}{4^3\cdot 9^{\frac{5}{3}}}$

7. Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Skorzystaj z podanych przykładów:

$65^2=(60+5)^2=60^2+2\cdot 60\cdot 5+5^2=3600+600+25=4225$

$89^2=(90-1)^2=90^2-2\cdot 90\cdot 1+1^2=8100-180+1=7921$

$31\cdot 29=(30+1)(30-1)=30^2-1^2=900-1=899$

a) 41^2, 78^2, 97^2, 52^2 b) $199\cdot 201$, $72\cdot 68$

8. Oblicz: a) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$, $\sqrt[3]{0{,}008}$, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{-32}$

b) $\sqrt{48}-\sqrt{27}$, $\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{108}$

9. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{14}{\sqrt{7}}$, $\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}+2}$, $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$, $\frac{5}{3+\sqrt[3]{2}}$

10. Zamień na ułamek zwykły: 3,06 7,(4) 0,(13) 5,4(7)

11. Które z podanych liczb są wymierne ?

5, -2, $7\frac{1}{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{36}$, $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $0{,}125$, π, $1{,}333\ldots$,

4,(12), 5,7(8), $\sqrt[3]{27}$, $(\sqrt{2})^0$, $\sqrt{1\frac{7}{9}}$, 3,010010001...

12. Podaj zaokrąglenie liczby 137,2547 z dokładnością do:

a) 10 b) 1 c) 0,1 d) 0,01

13. Wyznacz liczbę przeciwną i odwrotną do podanych liczb:

$a=5$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=1{,}75$, $d=(2\frac{1}{4})^{-1}$ $e=-2\sqrt{2}$, $f=\sqrt{3}-2$

14. Kasia i Monika zbierają pocztówki. Monika ma 70 pocztówek, a Kasia 112.
O ile % więcej pocztówek ma Kasia niż Monika?
O ile % mniej pocztówek ma Monika niż Kasia?

15. W pewnej klasie jest 14 chłopców i 20 dziewcząt.

a) Jaki procent liczby uczniów w klasie stanowią chłopcy a jaki dziewczęta ?
b) O ile punktów procentowych jest więcej dziewcząt niż chłopców ?
c) O ile procent więcej jest dziewcząt niż chłopców ?
d) O ile procent mniej jest chłopców niż dziewcząt ?
e) Jaki jest w tej klasie stosunek liczby chłopców do liczby dziewcząt wyrażony w procentach ? Wynik zaokrąglij do części dziesiętnych.

16. Cenę towaru obniżono najpierw o 25%, a następnie zwiększono o 17 zł.
Jaka była początkowa cena towaru, jeśli obecnie kosztuje on 86 zł

17. Wzrost kursu euro w stosunku do złotego spowodował podwyżkę ceny wycieczki zagranicznej o 5%. Ponieważ nowa cena nie była zachęcająca, postanowiono obniżyć ją o 8%, ustalając cenę promocyjną równą 1449 zł.
Oblicz pierwotną cenę wycieczki dla jednego uczestnika.

18. Przez pierwsze 4 miesiące roku obroty firmy „Skrzat” były na stałym poziomie, po czym przez 2 kolejne miesiące obroty rosły o 10% miesięcznie i osiągnęły w czerwcu kwotę 242 tys. zł. Jakie były łączne obroty firmy w pierwszym półroczu?

19. Cena pewnego towaru wraz z 7% stawką podatku VAT jest równa 64,20 zł.
Oblicz cenę tego towaru, gdyby stawka podatku VAT była równa 22% zamiast 7%.

20. Oblicz błąd bezwzględny i względny przybliżenia 2,4 liczby $2\frac{3}{7}$.

21. Liczba 160 jest przybliżeniem z nadmiarem pewnej liczb x.
Błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 2,1.
Oblicz x i błąd względny tego przybliżenia z dokładnością do 0,01 %.

22. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jeśli:
a) $A = \{1,3,5,a,b\}$, $B = \{1,2,a,c\}$
b) $A = \{3,6,7\}$, $B = \{3\}$

23. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B oraz zapisz liczby należące jednocześnie do obu przedziałów:
a) $A = (-2;5)$ $B = \langle -4;2)$
b) $A = \langle 3;\infty)$ $B = (-4;5\rangle$
c) $A = (-\infty;2)$ $B = \langle -3;4)$

24. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:
a) $6 - \frac{x+3}{2} < x$ b) $-7 \le 3x + 2 \le 5$

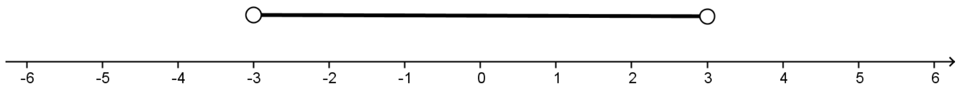
25. Oblicz:
a) $|13|$, $|-1{,}4|$, $|0|$
b) $|3{,}14 - \pi|$, $|\sqrt{13} + 13|$, $|-1 - \sqrt{3}|$
c) $|4 - \sqrt{5}|$, $|6\sqrt{3} - 10|$, $|3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}|$

26. Zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:
a) $|x-5|$, gdy $x \in \langle 5;\infty)$
b) $|2-4x|$, gdy $x \in (\frac{1}{2},\infty)$
c) $|x+2| - |x-1|$, gdy $x \in (-\infty,3)$
d) $2|x-3| - |2x+6|$, gdy $x \in (4,\infty)$

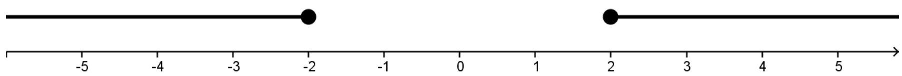
27. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, zaznacz na osi liczbowej zbiory liczb opisanych poniższymi warunkami:
a) $|x| = 1$
b) $|x| > 4$
c) $|x| \le 5$
d) $|x-1| \ge 2$
e) $|x+5| < 3$
f) $|3-x| > 6$

28. Liczby zaznaczone na osi liczbowej zapisz za pomocą nierówności z wartością bezwzględną:

a)

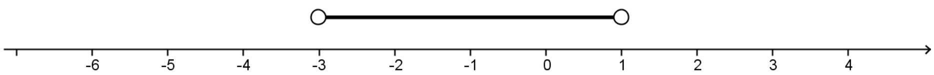


b)

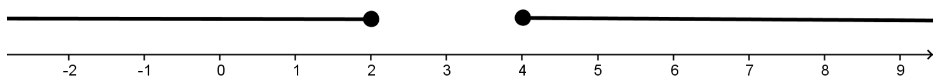


c)

d)



e)



29. Rozwiąż równania:

a) $|x|=5$ b) $|x-5|=0$ c) $\sqrt{x^2}=81$

$|x-2|=4$ $|x-1|=-2$ $\sqrt{(x+2)^2}=6$

$|2x+3|=2$

30. Rozwiąż nierówności:

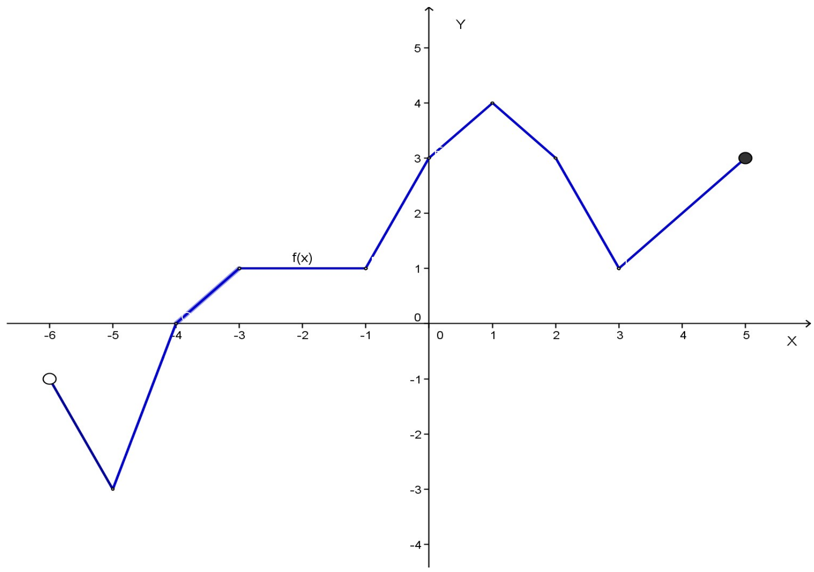
a) $|x|<4$ b) $|x-5|\leqslant 2$

$|x|\geqslant 3$ $|x+4|>1$

2. WŁASNOŚCI FUNKCJI

1. Korzystając z wykresu funkcji f określ:

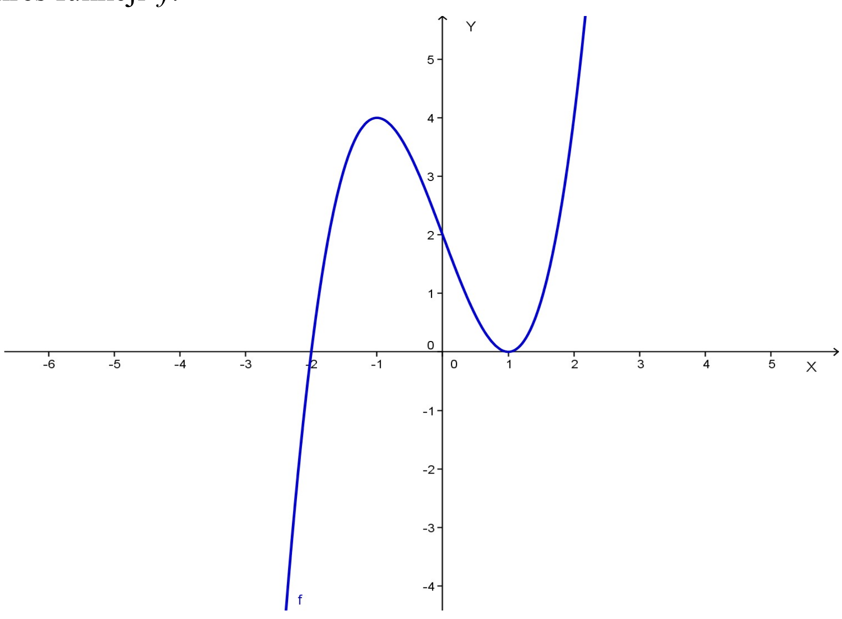
a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f
b) miejsce zerowe funkcji f
c) przedziały monotoniczności funkcji f
d) $f(-3)$ i $f(5)$
e) najmniejszą i największą wartość funkcji f
f) najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle 0;5\rangle$
g) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie
h) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od 1
i) największą wartość funkcji $g(x) = f(x) - 3$
j) miejsce zerowe funkcji $h(x) = f(x+1)$



2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f:

Narysuj wykresy funkcji:

a) $y=f(x)+4$
b) $y=f(x-3)$
c) $y=f(x+5)-1$
d) $y=-f(x)$
e) $y=f(-x)$



3. Dana jest funkcja $f(x)=|x|-2, \quad x\in\{-2,-1,0,\frac{1}{2}\}$.

Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu, wykresu oraz podaj jej opis słowny.
Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

4. Dana jest funkcja określona za pomocą zbioru par uporządkowanych :

$$\{(x, x^2+1): \ x\in N_+ \quad i \quad x\leqslant 7\}.$$

a) Sporządź wykres tej funkcji i określ jej zbiór wartości.
b) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 37.

5. Funkcja f określona na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych przyporządkowuje każdej liczbie n resztę z dzielenia tej liczby przez 4.

a) Określ zbiór wartości funkcji f.
b) Podaj zbiór wszystkich miejsc zerowych funkcji f.
c) Narysuj wykres funkcji f dla $n\leqslant 10$.

6. Narysuj wykres funkcji

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & dla \quad x\in\{-4,-3,-2,0\} \\ 2 & dla \quad x>1 \end{cases}$$

7. Dana jest funkcja

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x-1 & dla \quad x\in(-\infty;-3) \\ 2x+4 & dla \quad x\in(-3;+\infty) \end{cases}$$

a) Oblicz miejsca zerowe tej funkcji.
b) Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartość 500?

8. Narysuj wykres funkcji określonej na zbiorze R, która
dla argumentów $x\in(-\infty;-2)\cup(5;\infty)$ przyjmuje wartości dodatnie,
dla $x\in(-2;5)$ przyjmuje wartości ujemne,
jej miejscami zerowymi są liczby -2 i 5
oraz najmniejsza wartość tej funkcji to -4.

9. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\frac{7}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{x+1}{3-4x}$

c) $f(x)=\frac{4}{x^2+4}$

d) $f(x)=\frac{4}{x^2+2x}$

e) $f(x)=\sqrt{x+5}$

f) $f(x)=\sqrt{4-x}$

10. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+3}}$.

a) Określ jej dziedzinę.
b) Podaj miejsca zerowe funkcji f.
c) Sprawdź, czy punkt $(-1,-4\sqrt{2})$ należy do wykresu funkcji f.
d) Znajdź współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina osie układu współrzędnych.

11. Wyznacz brakujące współrzędne punktów $A(-2,y)$ oraz $B(x,-7)$ tak, aby każdy z nich należał do wykresu funkcji $f(x)=-x^2-5$.

12. Punkt A o rzędnej -8 należy do wykresu funkcji $f(x)=\frac{1-x}{2}$.

Wyznacz odciętą punktu A.

3. FUNKCJA LINIOWA

1. Wyznacz wzór funkcji liniowej $f(x)$ wiedząc, że:

a) należą do niej punkty (-1,2) i (3,5),

b) należy do niej punkt (-2,3) i jest ona równoległa do prostej $y=2x+1$,

c) f(-2) = 1 i jest ona prostopadła do prostej $y=-4x+5$,

d) jej miejscem zerowym jest $\frac{5}{2}$, a rzędna punktu przecięcia z osią OY wynosi 5,

e) przyjmuje wartości dodatnie dla $x\in(7;+\infty)$, a jej współczynnik kierunkowy wynosi 2,

f) jej wykres jest nachylony do osi OX pod kątem 30^o oraz wartość funkcji f w punkcie $-\sqrt{3}$ wynosi -6.

2. Dana jest funkcja liniowa $f(x)=(3\text{m}-2)x+2\text{m}-1$.

a) Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest funkcją malejącą?

b) Dla jakich wartości parametru m miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1?

c) Dla jakich wartości parametru m kąt nachylenia wykresu funkcji f do osi OX ma miarę 45^o.

3. Dla jakiej wartości parametru m punkty $A(-4{,}3)$, $B=(4\text{m},m+1)$ i $C(6,-2)$ są współliniowe.

4. W tabeli podane są wartości funkcji liniowej f dla kilku argumentów:

x	-1	0	2
$f(x)$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-4+\sqrt{3}$

a) Wyznacz wzór oraz miejsce zerowe funkcji f.

b) Dla jakich argumentów wartości funkcji są większe od $3\sqrt{3}$.

5. Dla jakich wartości parametru m proste o równaniach $y=(m-2)x+1$ i $y=-\frac{m}{3}x+2$ są:

a) równoległe, b) prostopadłe?

6. Rozwiąż równanie:

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x-3}{9}=\frac{x}{6}+2$$

7. Rozwiąż nierówność:

$$3(x-1)^2-(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\geqslant 3x^2-(x+4)(x-1)$$

8. Bartek jest o 4 lata starszy od Izy. Za 10 lat będą mieli razem 50 lat. Ile lat mają teraz?

9. Monetę 5-złotową rozmieniono na 22 monety o nominałach 50 gr i 10 gr.
Ile było monet każdego rodzaju?

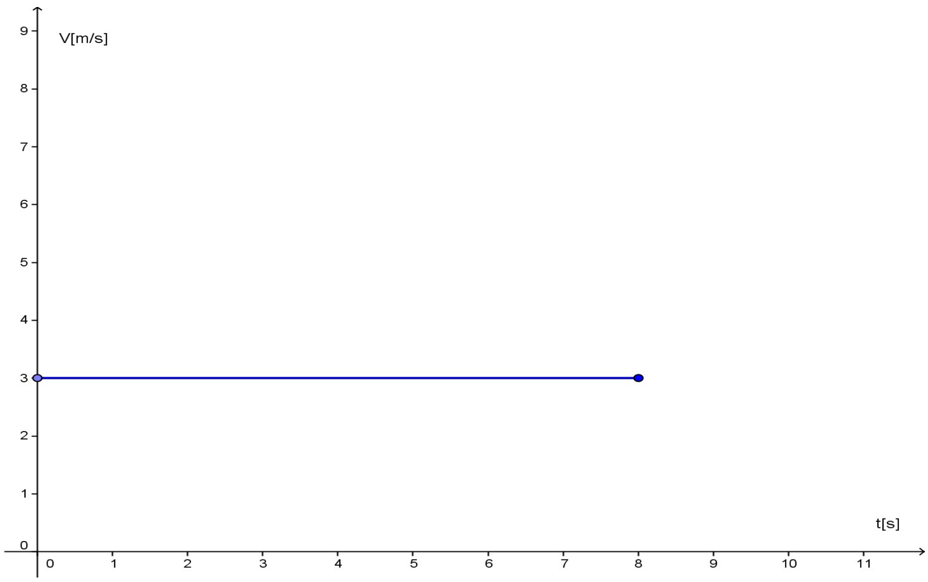
10. Jeśli długość danego prostokąta powiększylibyśmy o 4 cm, a szerokość o 3 cm, to jego pole zwiększyłoby się o 43 cm². Jeśli natomiast jego długość zwiększylibyśmy o 7 cm, a szerokość pozostawilibyśmy bez zmiany, to jego pole zwiększyłoby się o 28 cm².
Oblicz długość i szerokość prostokąta.

11. Zależność temperatury w skali Fahrenheita (°F) od temperatury w skali Celsjusza (°C) wyraża wzór $F = 32 + 1{,}8\ C$.

a) Oblicz, w jakiej temperaturze w skali Fahrenheita zażywasz kąpieli, zakładając, że myjesz się w temperaturze 38°C.

b) W czajniku znajduje się woda o temperaturze 149°F. Ile °C ma ta woda?

12. Rysunek przedstawia wykres funkcji prędkości w zależności od czasu. Narysuj wykres zależności długości drogi od czasu.



13. W zakładzie krawieckim ze 160 m materiału uszyto 64 jednakowe sukienki.

a) Oblicz, ile metrów materiału potrzeba na uszycie jednej sukienki.

b) Oblicz, ile metrów materiału potrzeba na uszycie 28 takich sukienek.

c) Napisz wzór wyrażający zużycie materiału w metrach w zależności od liczby x uszytych sukienek.

14. Magda podjęła pracę wakacyjną w drogerii. Zaproponowano jej stawkę dzienną w wysokości 15 zł plus 1 zł 20 gr, za każdy sprzedany kosmetyk, niezależnie od jego wartości.
Magda pracowała w sklepie przez 20 dni.

a) Podaj wzór opisujący wysokość jej pensji p [zł] w zależności od liczby k sprzedanych kosmetyków i określ dziedzinę tej funkcji.

b) Ile co najmniej kosmetyków sprzedała Magda, jeśli jej wynagrodzenie było wyższe niż 420 zł?

15. Grupa kolarzy znajduje się w odległości 180 km od mety, do której zbliża się ze stałą prędkością równą 45 km/h. Napisz wzór funkcji opisującej odległość kolarzy od mety w zależności od czasu jazdy. Narysuj wykres tej funkcji.

16. Abonament miesięczny za telefon wynosi 50 zł. Dodatkowo za każdą rozpoczętą minutę rozmowy należy zapłacić 15 gr. Znajdź wzór funkcji, która liczbie minut przyporządkowuje miesięczną opłatę za telefon.

a) Oblicz, po ilu minutach rozmowy opłata za telefon przekroczy 100 zł.

b) Gdyby opłata za minuty rozmowy podrożała o 20% a abonament o 10%, to o ile minut krócej niż w punkcie a) rozmawialibyśmy płacąc 100 zł?

17. Dwie konkurencyjne firmy "Alfa" i "Beta" chcą podjąć się organizacji wycieczki. Opłata za wycieczkę w przypadku każdej z ofert składa się z części stałej, niezależnej od liczebności grupy oraz stawki za każdego uczestnika. Opłata stała i stawka wynoszą odpowiednio 3000 zł i 245 zł w firmie "Alfa" oraz 4400 zł i 206 zł w firmie "Beta". Oblicz:

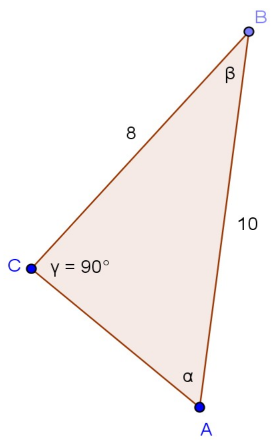
a) przy jakiej liczbie uczestników wycieczki korzystniejsza jest oferta firmy "Alfa",

b) jakie koszty przypadną na każdego z 38 uczestników wycieczki zorganizowanej przez firmę "Beta" (koszty podaj z dokładnością do 1 zł)

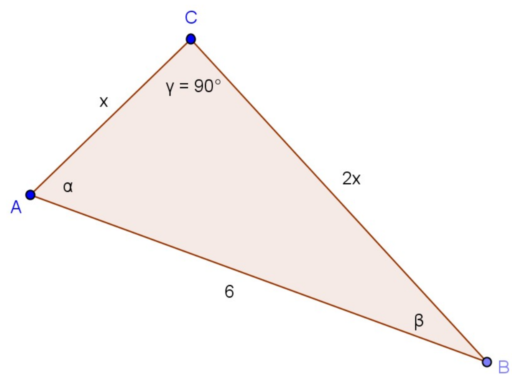
4. TRYGONOMETRIA

1. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β:

a)



b)



2. Oblicz wartość liczbową wyrażeń:

a) $(\sin 30^o + \sin 60^o)^2 - 2\,tg\,60^o \cdot tg\,30^o$

b) $\dfrac{1+2\sin 60^o}{4\cos 45^o} + \dfrac{1-\sin 30^o}{2\cos 45^o}$

3. W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta ostrego α leży przyprostokątna długości a. Oblicz pole trójkąta, jeśli:

a) $a=4,\quad tg\,\alpha=\dfrac{8}{15}$

b) $a=10,\quad ctg\,\alpha=2{,}4$

c) $a=40,\quad \sin\alpha=0{,}8$

d) $a=\sqrt{6},\quad \cos\alpha=0{,}5$

4. Wysokość opuszczona z wierzchołka A trójkąta ABC ma długość 12 cm i dzieli kąt BAC na kąty o miarach 45^o i 60^o. Oblicz pole trójkąta ABC.

5. Oblicz pole trójkąta równoramiennego, w którym kąt między ramionami ma 40^o a ramię ma długość 5. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1.

6. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest o 6 cm dłuższa od drugiej przyprostokątnej. Tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta wynosi $\frac{2}{5}$.
Oblicz długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

7. Podaj przybliżone wartości kąta ostrego x:

a) $\cos x=\frac{1}{5}$ b) $3\sin x=2$ c) $2\,tg\,x=\sqrt{13}$

8. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, wiedząc, że:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ b) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$ c) $tg\,\alpha=\frac{3}{4}$

9. Wiedząc, że α jest kątem ostrym, oblicz wartość wyrażenia:

a) $tg^4\alpha$, jeżeli $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, jeżeli $tg\,\alpha=2$

10. Sprawdź podane tożsamości:

a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

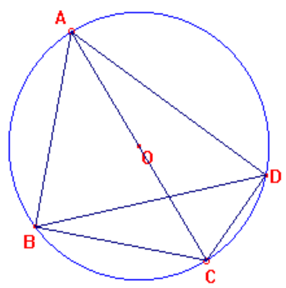
b) $\sin\alpha\cdot tg\,\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$

c) $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

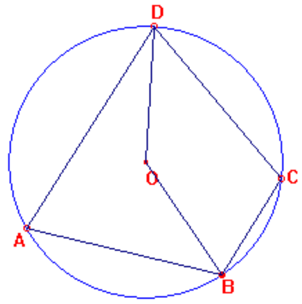
11. Drabina oparta o ścianę tworzy z nią kąt 60º. Jej dolny koniec jest oddalony od ściany o 2 m. Wyznacz długość drabiny. Wynik podaj w centymetrach.

5. PLANIMETRIA

1. Punkt O jest środkiem okręgu.
Miara kąta BAC jest równa 40^o.
Wyznacz miarę kąta ADB.



2. Punkt O jest środkiem okręgu.
Miara kąta ADC jest równa 55^o ,
a kąta DOB 150^o.
Wyznacz miary pozostałych kątów czworokąta $ABCD$.



3. Oblicz długości podstaw trapezu równoramiennego o obwodzie 24 opisanego na okręgu o promieniu 2.

4. Wyznacz długości wysokości trójkąta o bokach 10, 10 i 12.

5. Oblicz pole rombu o boku 17 cm, w którym długości przekątnych różnią się o 14 cm.

6. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|\overline{AB}|=4\sqrt{3}$ i $|\overline{AC}|=6$ oraz miara kąta CAB jest równa 30^o. Oblicz pole czworokąta $ABCD$, wiedząc, że symetralna odcinka $\overline{AB}$ jest symetralną odcinka $\overline{CD}$.

7. W okręgu poprowadzono cięciwę o długości 6 cm odległą o 3 cm od środka okręgu. Oblicz długości łuków okręgu, na które cięciwa dzieli ten okrąg.

8. W kole o promieniu 8 cm poprowadzono cięciwę o długości 8 cm. Oblicz pole powstałego odcinka koła.

9. Znajdź długość promienia koła wpisanego w romb o polu 36 cm² i kącie ostrym 30^o.

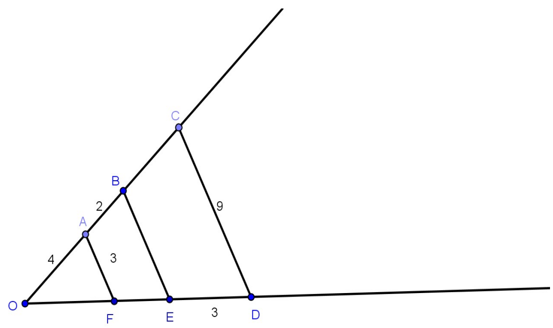
10. Na trójkącie równobocznym opisano okrąg i wpisano w niego okrąg.
Pole powstałego pierścienia kołowego jest równe 3π. Oblicz pole trójkąta.

11. Maszyna wycina z krążków kwadraty w ten sposób, że wykorzystuje materiał maksymalnie. Gdyby promień danego krążka zwiększono o 1, to pole wyciętego kwadratu zwiększyłoby się 4-krotnie. Oblicz pole danego krążka.

12. W trójkąt równoramienny ABC o obwodzie 20 wpisano okrąg. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wysokość opuszczona na podstawę AB jest 2,5 razy dłuższa od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

13. Oblicz wysokość drzewa, jeśli cień tego drzewa wynosi 11 m, a cień jego korony 8 m. Najniższe gałęzie zaczynają się na wysokości 1,5 m od ziemi.

14. Odcinki AF, BE i CD są równoległe.
Oblicz długości odcinków BE, BC OF i FE.



15. Trójkąt o bokach 3,7,8 jest podobny do trójkąta, którego najdłuższy bok ma długość 20. Oblicz pozostałe boki tego trójkąta.

16. Trójkąt prostokątny ABC, w którym przeciwprostokątna ma długość 4, przekształcono za pomocą podobieństwa o skali równej 2,5. Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na obrazie trójkąta ABC w tym przekształceniu.

17. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o polu równym 40, aby był podobny do prostokąta o bokach 3 i 5?

18. Na kartce papieru narysowane zostały dwa plany tego samego pokoju.
Pierwszy plan narysowany został w skali 1:200 a drugi w skali 1:250.
Wyznacz skalę podobieństwa przekształcającego pierwszy plan na drugi.

19. Trapez T_2 jest podobny do trapezu T_1 w skali 3. Długości podstaw trapezu T_2 są równe 4 i 7, a jego pole wynosi 15. Oblicz długość wysokości trapezu T_1.

20. Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 6, 5 i 5.

21. Ile punktów wspólnych ma prosta $y=a$ z okręgiem o środku S(4,1) i promieniu 2 w zależności od a ?

6. GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty A(-2,3) i B(6,-1).

2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A(-3,1) i równoległej do prostej $y=\frac{2x-4}{3}$.

3. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt A(0,-2) i prostopadłej do prostej $x-5y+15=0$

4. Dane są funkcje $f(x)=(6m-5)x+5$ i $g(x)=-2x+3$.
Wyznacz wartość parametru *m*, dla którego wykres funkcji f jest:
a) równoległy do wykresu funkcji *g*,
b) prostopadły do wykresu funkcji *g*.

5. Rozwiąż graficznie układ równań:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y-8=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 9x-3y+3=0 \end{cases}$

6. Dane są punkty $A(0,-6)$, $B(3,-1)$ i $C(\sqrt{5},-4)$. Oblicz długości odcinków AB, AC i BC.

7. Oblicz współrzędne środka odcinka AB, jeżeli $A=(-2,4)$, $B=(5,-6)$.

8. $S=(2,-\frac{1}{2})$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A=(-1\frac{1}{4},3)$.
Wyznacz współrzędne punktu B.

9. Proste o równaniach $2x-y-3=0$ i $2x-3y-7=0$ zaznacz w układzie współrzędnych oraz oblicz odległość punktu przecięcia się tych prostych od punktu S = (3,-8).

10. Prosta l tworzy z osią x kąt 45^o i przechodzi przez punkt M = (-2,2).
Prosta k, prostopadła do prostej l, przecina oś x w punkcie o odciętej $x_o=-3$.
a) Wyznacz równania prostych l i k.
b) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego boki zawierają się w prostych l i k oraz w osi y.

11. Dane są punkty A(-4,5), B(1,4) i C(8,-4).
a) Jeden z tych punktów nie leży na prostej l o równaniu $y=-\frac{3}{4}x+2$.
Oblicz odległość tego punktu od prostej l.
b) Oblicz pole trójkąta ABC.

12. Punkty A(-2,-4), B(2,0) i C(1,5) są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.
Wyznacz:
a) równania prostych zawierających boki AB i CD,
b) długość wysokości opuszczonej z punktu C na bok AB,
c) pole równoległoboku.

13. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r, jeśli:
a) $S(3,5)$, $r=2$ b) $S(-4,0)$, $r=3$
c) $S(1,-2)$, $r=\sqrt{5}$ d) $S(0,3)$, $r=\sqrt{2}$

14. Podaj współrzędne środka i długość promienia okręgu o równaniu:
a) $(x-5)^2+(y+2)^2=16$ b) $x^2+(y-3)^2=1\frac{7}{9}$ c) $x^2+y^2=8$
d) $(x+1\frac{1}{2})^2+(y-2\frac{1}{2})^2=12$ e) $(x+1)^2+y^2=9$

15. Punkt A należy do okręgu o środku $S(3,-1)$. Napisz równanie okręgu, jeżeli:
a) $A=(3,2)$ b) $A=(0,0)$ c) $A=(-1,2)$

7. FUNKCJA KWADRATOWA

1. Rozwiąż równania:

a) $x^2=2\frac{1}{4}$ b) $2x^2+8=0$ c) $5(3-2x^2)=15(x^2-1)$ d) $x^2+7x=0$

e) $7x^2=3{,}5x$ f) $\frac{x^2}{2}=\frac{4x}{5}$ g) $(x-2)(3-2x)=0$

2. Rozwiąż równania:

a) $x^2+10x+4=0$ b) $x(x-10)=-25$ c) $-x^2+\frac{1}{2}x+3=0$

d) $-6x^2+2x-1=0$ e) $(x-2)^2=8$

3. Rozwiąż nierówności:

a) $2x^2+5x<0$ b) $x^2-6x+9\leqslant 0$ c) $-3x^2+1\geqslant 0$

d) $-2x^2+3x-4>0$ e) $4x^2+3x-1>0$ f) $3x^2+x+2\geqslant 0$

g) $-x^2-4x+5\leqslant 0$

4. Wyznacz liczby spełniające jednocześnie obydwie nierówności

$4x^2-4x+1>0$ i $x^2-x-2<0.$

5. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} x-y=-1 \\ xy = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=y^2 \\ x-y=2 \end{cases}$

6. Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x)=-3x^2+2x+4.$

a) Rozwiąż równanie $f(x)=-1.$

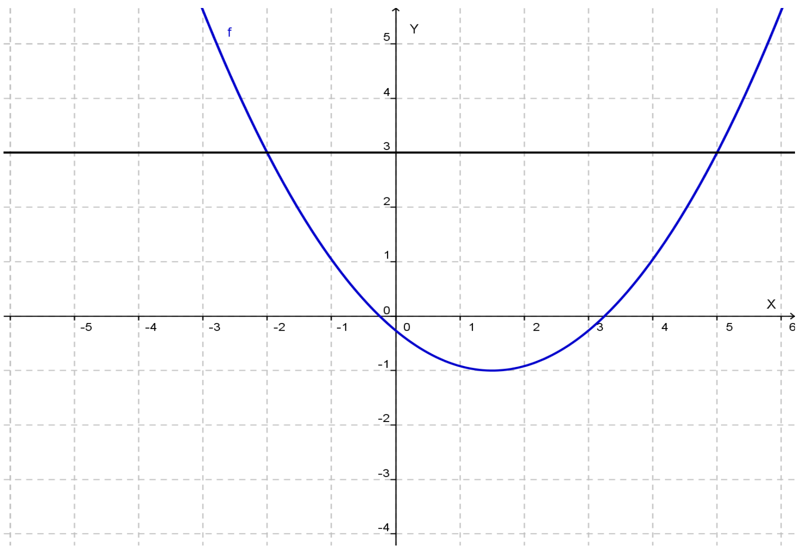
b) Rozwiąż nierówność $f(x)<4.$

7. Na rysunku naszkicowany jest wykres pewnej funkcji kwadratowej $f.$

a) Podaj rozwiązania równania $f(x)=3.$

b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\geqslant -3.$

c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)<-1.$



8. Narysuj wykresy funkcji:

a) $y=2x^2-3$

b) $y=-x^2+2$

c) $y=2(x-4)^2$

d) $y=-\frac{1}{2}(x+5)^2$

e) $y=(x+3)^2$

f) $y=-(x-2)^2+4$

g) $y=2(x+4)^2-3$

9. Do wykresu funkcji kwadratowej należą punkty $A(-1,0)$, $B(0,6)$. Wykres ten jest symetryczny względem prostej o równaniu $x=1$. Zapisz wzór tej funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.

10. Zapisz w postaci kanonicznej trójmian kwadratowy $y=6(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$.

11. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale:

a) $f(x)=-x^2-2x+1, \quad \langle -2;3\rangle$

b) $f(x)=-2x^2+12x-12, \quad \langle -1;2\rangle$

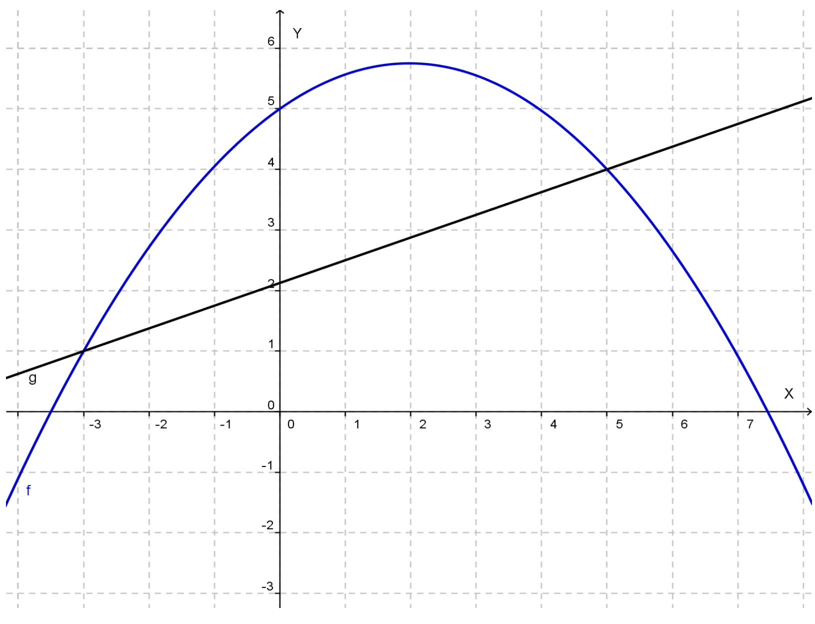
c) $f(x)=2x^2+8x+9, \quad \langle -3;0\rangle$

d) $f(x)=4(x-2)(x+1), \quad \langle -1;4\rangle$

12. Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x)=-3x^2+3x+6$.
Wyznacz współrzędne wierzchołka wykresu funkcji f oraz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Naszkicuj wykres funkcji f.

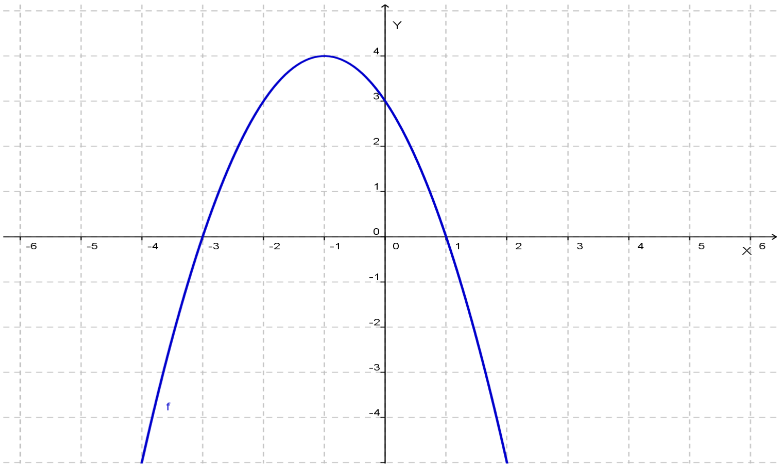
13. Określ liczbę różnych rozwiązań równania $3x^2+2x-m+1=0$ w zależności od wartości parametru m.

14. Na rysunku przedstawiony jest wykres pewnej funkcji kwadratowej f oraz wykres pewnej funkcji liniowej g.

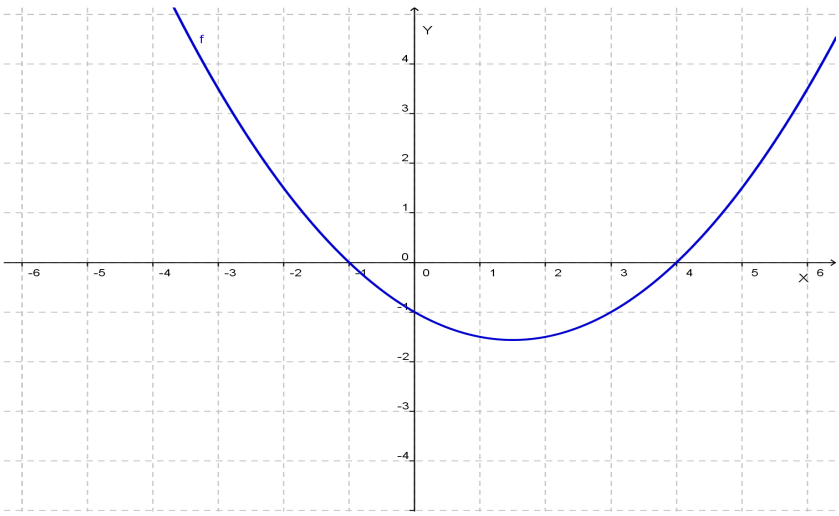


a) Podaj współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g.
b) Podaj rozwiązanie równania $g(x)=4$.
c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\leqslant g(x)$.

15. Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji kwadratowej f. Zapisz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.



16. Na rysunku przedstawiony jest wykres pewnej funkcji kwadratowej f. Odczytaj z rysunku współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych i zapisz wzór tej funkcji.



17. Wykres funkcji kwadratowej f przecina oś OY w punkcie o współrzędnych (0,1). Jego wierzchołek ma współrzędne (-1,3). Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

18. W tabeli podane są wartości funkcji kwadratowej f dla kilku argumentów.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-13	-4	1	2	-1

Rozwiąż nierówność $f(x) > 1$.

19. Przedział $(-\infty; 9\rangle$ jest zbiorem wartości pewnej funkcji kwadratowej f. Zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 7$ jest przedziałem $\langle 0; 2\rangle$. Wyznacz wzór funkcji f i zapisz go w postaci ogólnej.

20. Pole pewnej działki w kształcie prostokąta jest równe 195 m^2.
Jakie wymiary ma ta działka, jeżeli jej szerokość jest o 2 *m* krótsza od długości ?

21. Z drutu o długości 40 *cm* można zbudować prostokątne ramki o różnych wymiarach.
a) Wykonaj rysunek pomocniczy i oznacz literą *x* długość jednego z boków takiej ramki. Zapisz jakie długości mają pozostałe boki.
b) Zapisz wzór funkcji, która przedstawia zależność pola obszaru ograniczonego ramką od długości boku *x*.
c) Znajdź wymiary takiej ramki, która ogranicza największe pole.
d) Jakie wymiary powinna mieć ramka, aby ograniczała obszar większy od 25 cm^2 ?

8. WIELOMIANY

1. Podane wyrażenia przedstaw w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej:
a) $x-\frac{x+1}{2}+2(x-\frac{1}{4})$
b) $(2+5x)(2-5y)$
c) $(4x+3y)(4x-3y)-2(3x+2)^2$
d) $(\sqrt{3}+x)(x-\sqrt{3})+(2x-\sqrt{3})^2$

2. Dane są wielomiany: $P(x)=-4x+5,\quad Q(x)=x^2-3x+1,\quad R(x)=2x^3-1.$
Wykonaj działania:
a) $P-(Q+R)$
b) $4Q-3P+\frac{1}{2}R$
c) $P\cdot Q$
d) $R\cdot(P+Q)$

3. Zapisz w postaci sumy algebraicznej:
a) $(x+5)^3$
b) $(x-2)^3$
c) $(4-x)^3$
d) $(2x+3)^3$
e) $(4+2y)^3$
f) $(3x-2y)^3$

4. Rozłóż wielomian na czynniki:
a) $25x^2-9$
b) $7-36x^2$
c) x^5-4x^3
d) x^3-4x^2+4x
e) $x^3-2x^2+9x-18$
f) $2x^3-4x^2-8x+16$

5. Rozłóż wielomian na czynniki:
a) x^3+27
b) x^3-64
c) $8+125x^3$
d) $1-x^3$

6. Rozwiąż równanie:
a) $x^4-4x^2=0$
b) $x^7+9x^5=0$
c) $x^3+3x^2-2x-6=0$
d) $8x^3-12x^2-2x+3=0$

7. Rozwiąż równanie $2x^3 - 3x + 1 = 0.$

8. Zapisz w postaci iloczynu czynników liniowych wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 4.$

9. Rozłóż wielomian $W(x) = (x-1)(x+1)(x+3) - 3x - 9$ na czynniki liniowe i wyznacz jego pierwiastki.

10. Liczby -2 i 1 są pierwiastkami wielomianu trzeciego stopnia, którego współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest równy 1. Wyznacz pozostały pierwiastek tego wielomianu, wiedząc, że do wykresu wielomianu należy punkt $A(-1{,}6)$.

11. Dla jakich wartości parametru m pierwiastkami równania $[x^2 + (2-m)x - 2m](x+1) = 0$ są trzy kolejne liczby całkowite ujemne?

12. Liczby -2 ,1 i 3 są pierwiastkami wielomianu trzeciego stopnia $W(x)$. Wyznacz ten wielomian, wiedząc, że $W(0) = -6$.

13. Wielomian $W(x)$ jest wielomianem trzeciego stopnia. Zbiorem rozwiązań nierówności $W(x) \geqslant 0$ jest zbiór $(-\infty; -1) \cup \langle 1; 3 \rangle$. Zapisz wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu czynników liniowych, wiedząc, że $W(0) = -3$.

14. Rozwiąż równanie $x^3 + 2mx^2 - x + m + 6 = 0,$ wiedząc, że jednym z jego pierwiastków jest liczba 1.

15. Dla jakich wartości parametru a równania: $(x-a)(x^2 - 3x + 2) = 0$ i $(x-2)(x^2 - 1) = 0$ mają te same zbiory rozwiązań?

9. FUNKCJE WYMIERNE

1. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanych wartości x i y:

a) $\dfrac{-x^2}{y}$ $\quad x = -2, \ y = 0{,}5$

b) $x\sqrt{2} - (1-y)$ $\quad x = -\sqrt{2}, \ y = \sqrt{3} - 1$

c) $x^3 y^2 - y^3 x^2$ $\quad x = -1, \ y = -2$

d) $1 - \dfrac{x-1}{1-y}$ $\quad x = -3, \ y = -5$

e) $|2x - y| + |x - 2y|$ $\quad x = -7, \ y = 2$

2. Wyznacz dziedzinę wyrażenia:

a) $\dfrac{5}{x+7}$

b) $\dfrac{x+1}{x(x+1)}$

c) $\dfrac{y^2 - 1}{y^2 - 3y + 2}$

d) $\dfrac{3t}{t^2 - 2t}$

e) $\sqrt{x-3}$

f) $\dfrac{2}{y^2 + 4}$

3. Przedstaw podane wyrażenie w najprostszej postaci i podaj jego dziedzinę:

a) $\frac{2a+4}{6a+12}$ c) $\frac{c^2-c}{c^2-1}$

b) $\frac{b(b+3)}{9-b^2}$ d) $\frac{2+d}{d^2+2d}$

4. Zapisz w prostszej postaci:

a) $\frac{x^2-y^2}{y-x}$ b) $\frac{x^2-6xy+9y^2}{x^2-9y^2}$

5. Wykonaj działania i sprowadź otrzymane wyrażenia do najprostszej postaci.
Podaj dziedzinę tego wyrażenia.

a) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+x}$

b) $\frac{x+10}{x^2-4}+\frac{3}{2-x}$

c) $\frac{7-y}{3y+y^2}\cdot\frac{y+3}{2y-14}$

6. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3}{2x-1}=2$ d) $\frac{4-x}{x}=\frac{1}{2}x$

b) $\frac{2x-8}{x-4}=3$ e) $\frac{5}{x-3}=\frac{x}{2x-6}$

c) $\frac{2x}{x+3}=\frac{3}{5}$

7. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{5}{x}<3$ b) $\frac{2}{x-2}\geqslant 1$

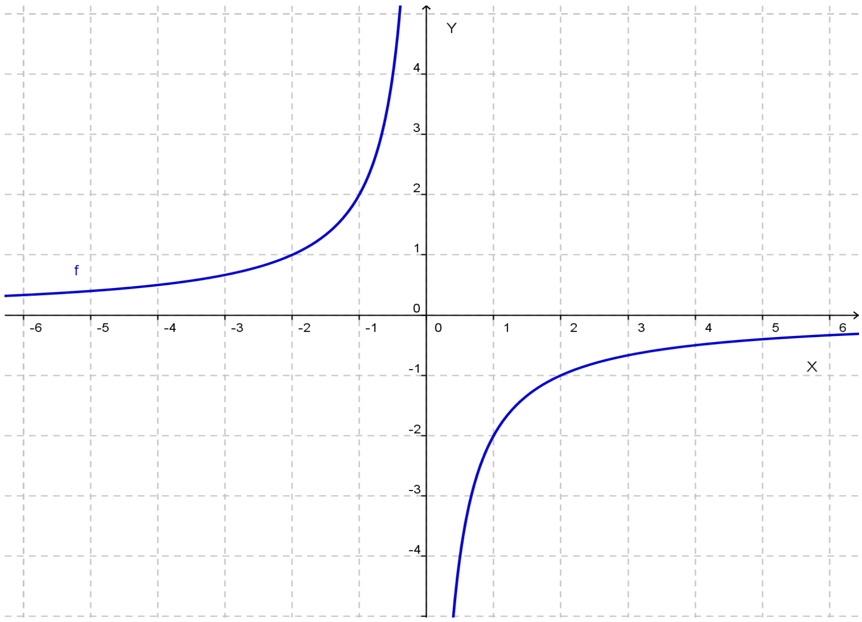
8. Sprawdź, czy zbiory rozwiązań nierówności: $2\mathrm{x}(x-1{,}5)<0$ i $\frac{3}{x}>2$ są równe.

9. Równania: $\frac{1}{2x}=3, \frac{1}{x}=m$ mają te same zbiory rozwiązań. Rozwiąż nierówność $\frac{1}{x}<m$.

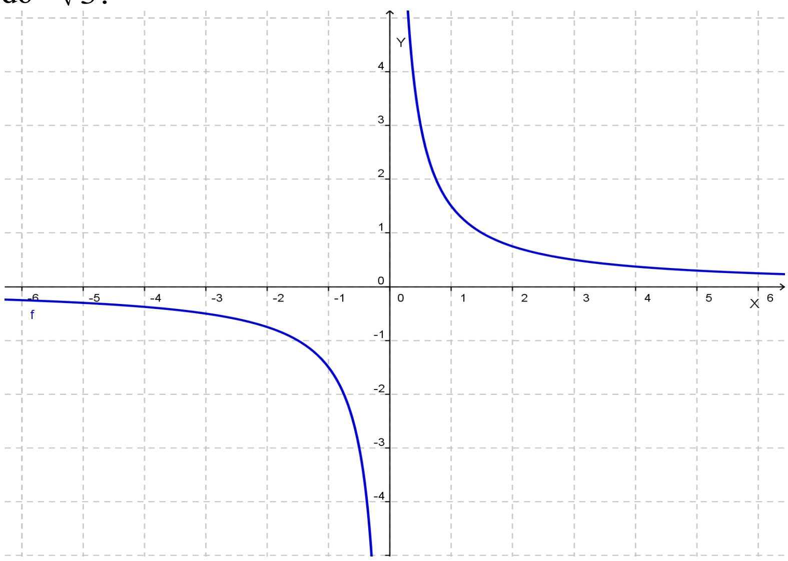
10. Na rysunku został przedstawiony wykres pewnej proporcjonalności odwrotnej f.

a) Napisz wzór funkcji f.

b) Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość $\frac{1}{3}$?



11. Rysunek przedstawia wykres pewnej proporcjonalności odwrotnej. Wyznacz liczbę odwrotnie proporcjonalną do $\sqrt{3}$.



12. Narysuj wykres zależności między długościami boków prostokąta o stałym polu równym 2.

13. Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z miasta A. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się 320 km od tego miasta a drugi 240 km.
Średnia prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego.
Znajdź średnie prędkości z jakimi poruszały się samochody.

14. Samochód jadąc ze średnią prędkością 80 km/h przejechał pewną drogę w ciągu 4,5 h.
O ile minut dłużej musiałby jechać, gdyby średnia prędkość wynosiła 72 km/h.

10. CIĄGI

1. Oblicz pierwsze 4 wyrazy podanego ciągu:

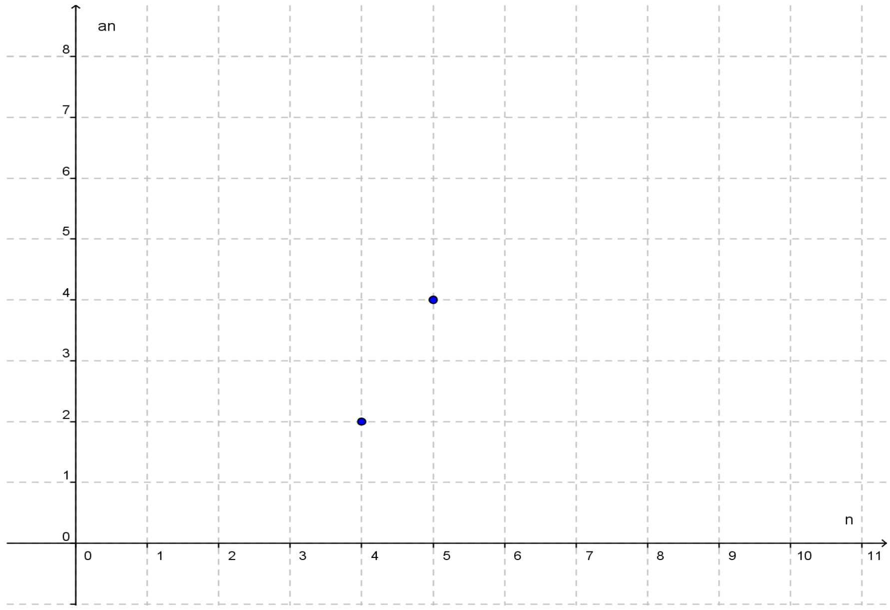
a) $a_n=3n-\frac{1}{n}$ d) $d_n=3^n+(-3)^n$

b) $b_n=2^n+n^2$ e) $e_n=|2-n|$

c) $c_n=(-1)^n\cdot n$

2. Sprawdź na podstawie definicji, czy ciąg $\left(\sqrt{2}+1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \sqrt{2}-3\right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

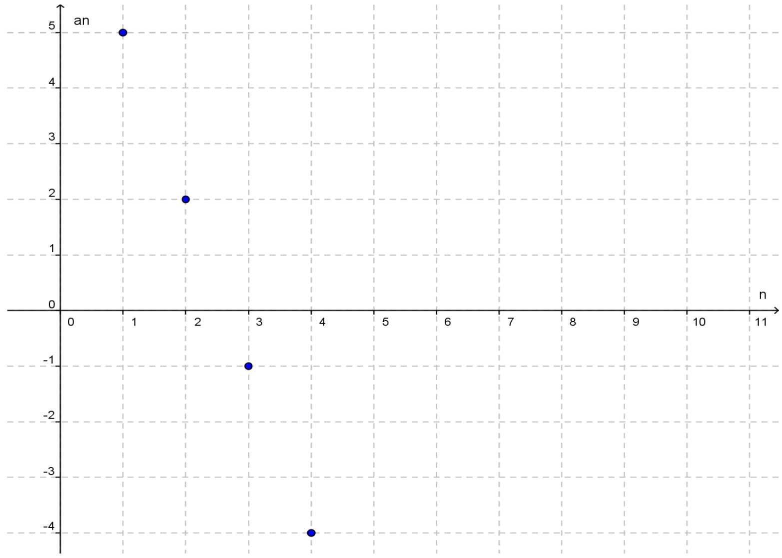
3. Na rysunku zaznaczone są dwa punkty należące do wykresu nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.



4. Na rysunku przedstawiona jest część wykresu pewnego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Podaj wzór na wyraz ogólny tego ciągu.

b) Które wyrazy tego ciągu są mniejsze od - 40?



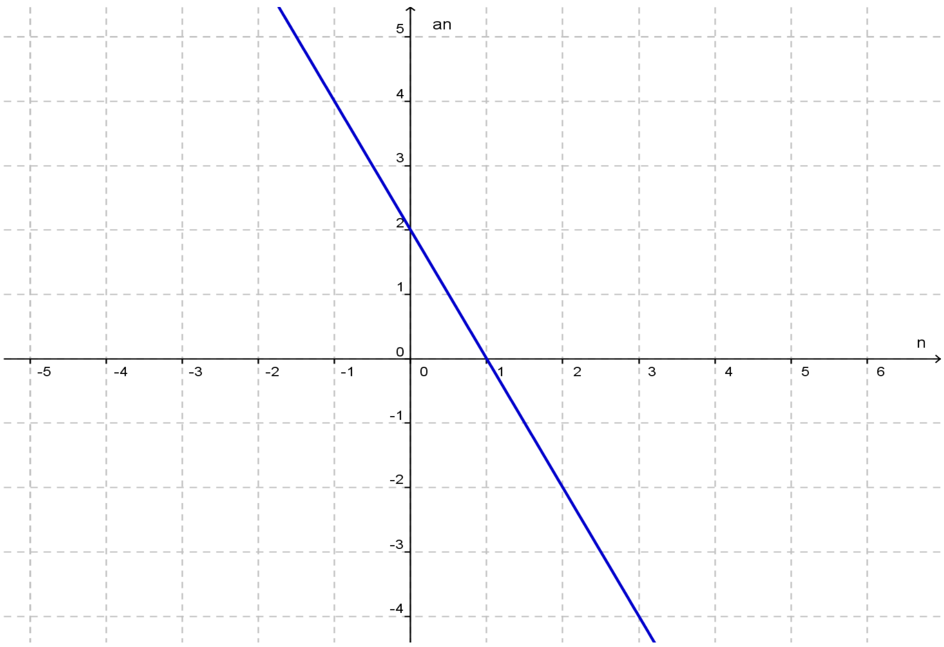
5. Oblicz sumę ciągu arytmetycznego:

a) $2+5+8+...+149$

b) 50+46+42+...+(-10)

6. Rozwiąż równanie $3\cdot3^3\cdot3^5\cdot...\cdot3^{2n-1}=27^{27}$.

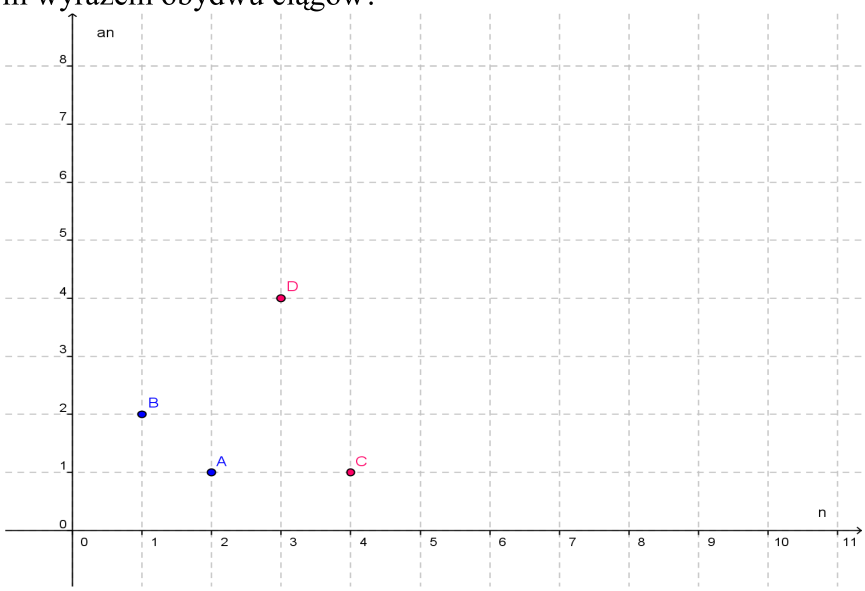
7. Wykres nieskończonego ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji liniowej przedstawionym na rysunku. Zbadaj na podstawie definicji, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.



8. Uzasadnij, że jeśli n-ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n=2n^2+n-1$ dla $n = 1, 2, ...,$ to ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

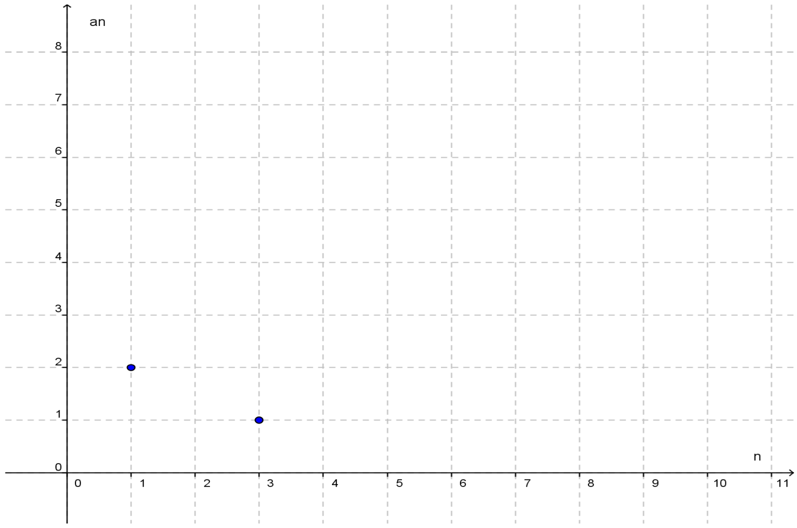
9. Na rysunku zaznaczone zostały po dwa punkty (odpowiednio A i B oraz C i D) należące do wykresów dwóch różnych ciągów geometrycznych.

Wyznacz siedem początkowych wyrazów każdego ciągu. Który spośród wyznaczonych wyrazów jest wspólnym wyrazem obydwu ciągów?



10. Liczby 0 i 3 są odpowiednio równe trzeciemu i piątemu wyrazowi pewnego siedmio wyrazowego ciągu arytmetycznego. Naszkicuj wykres tego ciągu.

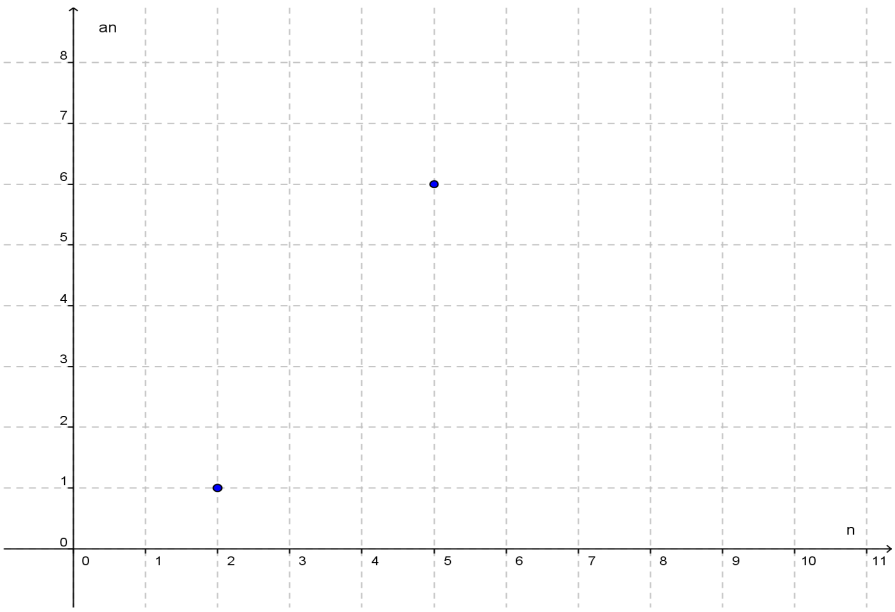
11. Wyznacz drugi wyraz ciągu geometrycznego, którego dwa punkty wykresu zostały zaznaczone na rysunku.



12. Wiedząc, że suma pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 4, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu tego ciągu jest równy 16, wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n).

13. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_5=\frac{1}{27}$ i $a_2=1$. Wyznacz ciąg (a_n) i oblicz wyraz a_8.

14. Na rysunku zaznaczone są dwa punkty należące do wykresu nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.



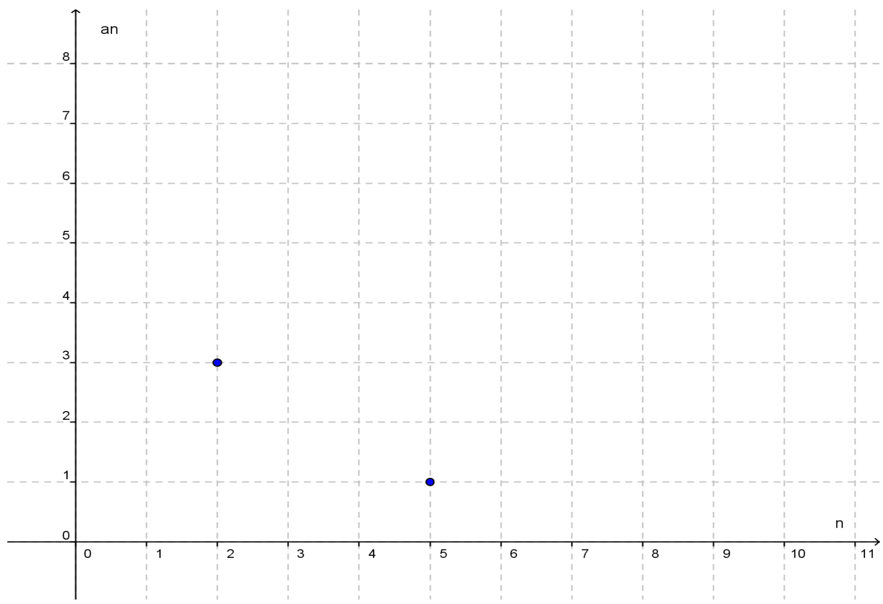
15. Zbadaj na podstawie definicji, czy ciąg określony wzorem $(a_n)=\frac{2-5n}{7}$,
gdzie n = 1, 2, ..., jest ciągiem arytmetycznym.

16. Zbadaj na podstawie definicji, czy ciąg określony wzorem $(a_n)=2n+1+\frac{2}{n}$,
gdzie n = 1, 2, ..., jest ciągiem arytmetycznym.

17. Zbadaj na podstawie definicji, czy ciąg określony wzorem $(a_n)=\frac{2\cdot 3^{n+1}}{4^n}$,
gdzie n = 1, 2, ..., jest ciągiem geometrycznym.

18. Suma 100 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 2175 oraz $a_{51}=22$. Wyznacz ten ciąg.

19. Wyznacz wyraz pierwszy i iloraz ciągu geometrycznego, którego fragment wykresu został przedstawiony na rysunku.



20. Wyrazy $a_3, a_4, a_5, \ldots, a_9$ ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=1$$
$$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=4.$$

Wyznacz iloraz q tego ciągu.

21. Liczby: $2x+1, x^2+4, 3x^2-1$ w podanej kolejności są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

22. Liczby: $x-1, x+1, 3x-1$ w podanej kolejności są równe kolejnym wyrazom rosnącego ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

23. W skończonym ciągu arytmetycznym pierwszy wyraz jest równy -1, zaś różnica jest równa 2. Z ilu wyrazów składa się ten ciąg, jeśli suma jego wszystkich wyrazów jest równa 575?

24. Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy równej 3. Pierwsza liczba powiększona o 3, druga powiększona 1 i trzecia liczba są w podanej kolejności równe kolejnym wyrazom pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

25. Współczynniki przy niewiadomej *x* występujące po lewej stronie równania

$$3x+5x+\ldots+(2n+3)x=240,$$

gdzie *n* jest pewną liczbą naturalną większą od 1, są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Wyznacz *n*, wiedząc, że rozwiązaniem równania jest liczba 3.

26. Zbadaj na podstawie definicji monotoniczność ciągu (a_n) danego wzorem ogólnym

$a_n=\dfrac{n+2}{n+3}$ dla $n = 1, 2, \ldots$

27. Zbadaj na podstawie definicji monotoniczność ciągu (a_n) określonego wzorem

$a_n=n^2+n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

28. Ciąg -3, 1, 5, ... jest nieskończonym ciągiem arytmetycznym. Które wyrazy tego ciągu należą do przedziału (1000, 1010)?

29. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\dfrac{3-2x}{5}$. Oblicz sumę 33 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem $a_n=f(n-3)$ dla $n = 1, 2, \ldots$

30. W pierwszym rzędzie amfiteatru może zasiąść 40 osób, a w każdym następnym rzędzie o 8 osób więcej. Ile miejsc znajduje się w ostatnim, dwudziestym pierwszym rzędzie ? Ile miejsc ma ten amfiteatr ?

31. Na konto wpłacono 4000 zł. Kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku, a oprocentowanie wynosi 3% w stosunku rocznym. Oblicz wysokość odsetek po 5 latach.

32. Na lokatę miesięczną, oprocentowaną na 6% w stosunku rocznym, wpłacono 2000 zł. Oblicz jaki będzie stan tej lokaty po 4 miesiącach.

33. Na lokatę 3-miesięczną o oprocentowaniu 3% wpłacono 5000 zł. Po jakim czasie suma odsetek wyniesie ponad 200 zł ?

11. FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMY

1. Narysuj wykresy następujących funkcji:

a) $y=2^x$ c) $y=2^{x-4}$ e) $y=(\frac{1}{3})^x$ g) $y=(\frac{1}{3})^{x+5}$

b) $y=2^x-3$ d) $y=-2^x$ f) $y=(\frac{1}{3})^x+4$

2. Znajdź x:

a) $\log_2 x=4$ c) $\log_{\frac{2}{5}} x=-1$ e) $\log_{\frac{1}{2}} x=5$

b) $\log x=-5$ d) $\log_3 x=\frac{1}{4}$

3. Znajdź x:

a) $\log_x 125=3$ c) $\log_x 3=\frac{1}{2}$ e) $\log_x 10000=2$

b) $\log_x 7=-\frac{1}{2}$ d) $\log_x 13=1$

4. Oblicz:

a) $\log_2 32$ $\log_{\frac{1}{7}} 7$ $\log_4 2$ $\log_{0,3} 0,027$ $\log_{0,1} 100$

b) $\log_5 5$ $\log_7 1$ $\log 10$ $\log 0,1$ $\log\sqrt{10}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ $\log_9 \frac{1}{3}$ $\log_5 \frac{1}{125}$ $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ $\log_{\sqrt{5}} 5$

d) $\log_5 5^3$ $\log_8 8^{\frac{1}{3}}$ $\log_4 4^{-\frac{2}{7}}$ $\log_{\frac{1}{2}} 2^{-4}$ $\log_7 (7^{-3})^{\frac{1}{5}}$

5. Oblicz:

a) $\log_3 4,5+\log_3 2$ d) $\log 4-\log 5+\log 125$

b) $\log 2000+\log\frac{1}{2}$ e) $\log 8+3\log 5$

c) $\log_7 14-\log_7 2\sqrt{7}$ f) $2\log_5 10-\log_5 4$

6. Przyjmijmy, że liczbę ludności Polski w latach 1960 -1970 można obliczyć ze wzoru $L=a\cdot b^t$, gdzie a i b są stałymi, a t oznacza czas w latach po 1962 roku (wtedy t>0) lub przed 1962 (wtedy t<0).

Ludność Polski	
1962	1964
30,5 mln	31,3 mln

a) Korzystając z danych przedstawionych w tabelce, oblicz wartości a i b.
b) Oblicz, jaka była (wg otrzymanego wzoru) liczba ludności Polski w 1960 r. oraz w 1970 r. Porównaj swoje wyniki z rzeczywistą liczbą ludności w tych latach (w 1960 r. - 29,8 mln, w 1970 r. - 32,6 mln).
c) Oszacuj, jaka byłaby liczba mieszkańców Polski w 1999 r., gdyby współczynnik przyrostu naturalnego z lat 1962 – 1964 utrzymywał się bez zmian aż do tego czasu. Porównaj otrzymany wynik z rzeczywistą liczbą ludności Polski w 1999 r., która wynosiła 38,6 mln.

12. STATYSTYKA

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę, dominantę, wariancję i odchylenie standardowe wagi plecaków uczniowskich: 2 kg, 6 kg, 5 kg, 2 kg, 1 kg, 8 kg.

2. Oblicz x, jeśli średnia ważona liczb $3,8,x,15$ z wagami odpowiednio $5,2,7,1$ jest równa 4.

3. Średnia waga 8 wioślarzy pewnej osady wioślarskiej wynosi 85 kg, a waga sternika tej osady jest równa 58 kg. Oblicz średnią wagę wszystkich zawodników tej osady.

4. W 3 częściach egzaminu student otrzymał kolejno 20, 45 i 60 punktów.
II część egzaminator traktuje jako 3-krotnie ważniejszą od I, a III 4-krotnie ważniejszą od I.
Oblicz średnią ważoną liczby punktów, które zdobył student podczas tego egzaminu.

5. Średnia arytmetyczna liczb $1,1,5,1,6,3,2,5,2,5,a,b$ wynosi 3, a dominanta jest równa 1.
Znajdź wartości a i b oraz medianę tych liczb.

6. Wyniki pewnego sprawdzianu przedstawia tabela. Dane z tabeli przedstaw w postaci diagramu słupkowego oraz oblicz średnią arytmetyczną ocen, medianę i odchylenie standardowe.

ocena	1	2	3	4	5
liczba uczniów	2	3	0	8	12

7. Wśród 3 klas pierwszych uczniowie deklarowali następującą liczbę rodzeństwa:

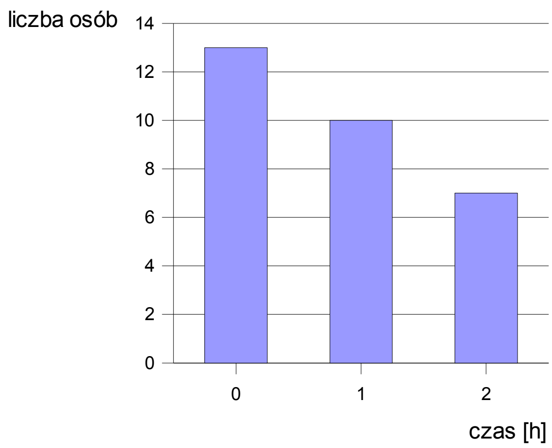
liczba rodzeństwa	0	1	2	3
Ia	4	7	14	5
Ib	7	16	4	3
Ic	6	12	10	2

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń będzie miał co najmniej dwoje rodzeństwa.
b) Jaka jest średnia liczba rodzeństwa we wszystkich klasach pierwszych?
c) Wyznacz medianę i odchylenie standardowe liczby rodzeństwa we wszystkich klasach I.
d) Oblicz, ile procent uczniów jest jedynakami (wynik podaj z dokładnością do 0,1%).

8. Na diagramie zestawiono wyniki ankiety dotyczącej czasu przeznaczonego dziennie na uprawianie sportu.

a) Oblicz średnią liczbę godzin przeznaczonego dziennie na uprawianie sportu w badanej grupie.

b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczonego dziennie na uprawianie sportu. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

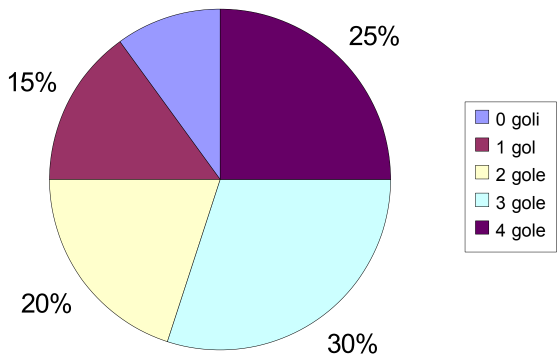


9. Diagram kołowy przedstawia informacje o bramkach, które padły w 40 meczach piłkarskich.

a) Uzupełnij tabelę:

liczba strzelonych goli	0	1	2	3	4
liczba meczów					

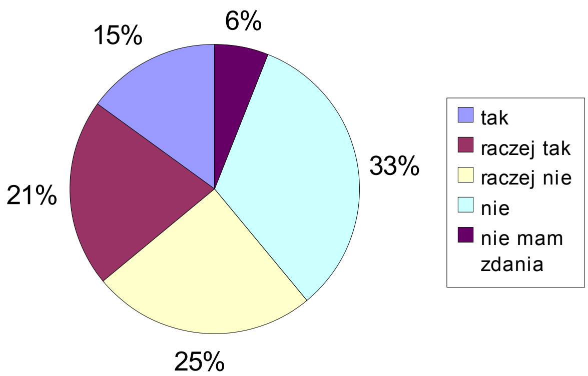
b) Określ średnią arytmetyczną i medianę liczby zdobytych goli w jednym meczu.



10. W dwóch miastach A i B, liczących odpowiednio 25 i 110 tys. mieszkańców, przeprowadzono badanie opinii publicznej. Rozkład odpowiedzi w mniejszym mieście przedstawia diagram kołowy.

W informacji opublikowanej po zakończeniu badania podano:
"Na nasze pytanie 58% osób odpowiedziało twierdząco (tzn. "tak" lub "raczej tak"). W mieście B odpowiedzi "tak" udzieliło 31% osób."

Jaki był procent odpowiedzi "raczej tak" w mieście B ?



13. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Doświadczenie losowe polega na rzucie kostką do gry i rzucie 3 różnymi monetami. Opisz zbiór zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu. Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych?

2. Rzucamy 3 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyskano:

a) same orły,
b) dokładnie 1 reszkę,
c) co najmniej 2 orły,
d) co najwyżej 1 orła.

3. Rzucamy 2 razy kostką do gry. Dane są zdarzenia:

A - za pierwszym razem wypadły 4 oczka,
B - suma oczek na obu kostkach wyniosła 10.

Oblicz $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ i $P(A\setminus B)$.

4. Ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ losujemy 2 liczby:

a) ze zwracaniem,
b) bez zwracania.

W obu przypadkach opisz zbiór zdarzeń elementarnych i oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wylosowanych liczb będzie nieparzysty.

5. Oblicz:

a) $P(A\cup B)$, jeśli $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B')=\frac{3}{5}$ oraz A i B są zdarzeniami wykluczającymi się,
b) $P(A\cup B)$, jeśli $P(A')=0{,}85$, $P(B)=0{,}5$, $P(A\cap B)=0{,}35$,
c) $P(A\cap B)$, jeśli $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}6$, $P(A\cup B)=2\cdot P(B')$.

6. Na ile sposobów mogą wsiąść do autobusu 4 kobiety i 5 mężczyzn, jeśli pierwsze wsiadają kobiety?

7. Ile różnych wyrazów (mających sens lub nie) można ułożyć wykorzystując wszystkie litery wyrazu MATEMATYKA.

8. W pewnym turnieju uczestniczy 10 drużyn, rozgrywając mecze systemem "każdy z każdym". Ile meczów zostanie rozegranych w turnieju?

9. Do tramwaju składającego się z 2 wagonów wsiada 7 pasażerów. Na ile sposobów mogą się rozmieścić w tych wagonach?

10. Do metra wsiadło 5 osób. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić metro na różnych stacjach, jeśli:

a) do końca trasy pozostało 7 stacji,
b) do końca trasy pozostało 7 stacji i wiadomo, że na 2. stacji nikt nie wysiadł?

11. Ile jest wszystkich liczb 4-cyfrowych, w których zapisie występują różne cyfry?

12. Ile jest wszystkich liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie mogą wystąpić tylko cyfry ze zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6\}$?

13. W urnie są 4 czerwone i 2 niebieskie kule. Losujemy z urny 2 razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy:

a) kule w różnych kolorach,

b) za drugim razem kulę czerwoną.

Zadanie rozwiąż za pomocą drzewka.

14. Rzucamy jeden raz monetą i jeden raz kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy reszkę i co najwyżej 4 oczka.

15. Rzucamy jeden raz monetą. Jeśli wyrzucimy orła, to losujemy jedną kulę z urny zawierającej 3 kule białe i 5 zielonych, a gdy wyrzucimy reszkę, to losujemy 2 kule z tej urny.

a) Narysuj drzewo ilustrujące to doświadczenie losowe.

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy 2 kule białe.

c) Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy przynajmniej jedną kulę zieloną.

16. W loterii jest 20 losów, w tym 1 wygrywający i 2 uprawniające do ponownego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej, jeśli kupimy 1 los?

17. Rzucamy 3 razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) za każdym razem otrzymamy inną liczbę parzystą,

b) co najmniej raz wypadnie 6 oczek,

c) za każdym razem wypadnie nieparzysta liczba oczek.

18. Z cyfr 0,1,2,3,4,5,6,7 tworzymy liczb 5-cyfrowe o różnych cyfrach. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby nieparzystej większej niż 60000?

19. Na parterze 8-piętrowego bloku wsiada do windy 4 pasażerów. Oblicz prawdopodobieństwo, że: a) wszyscy wysiądą na 5. piętrze,

b) wszyscy wysiądą na na tym samym piętrze,

c) wszyscy wysiądą na różnych piętrach,

d) nikt nie wysiądzie na 3. piętrze.

20. Z talii 52 kart losujemy 3 razy po jednej karcie, za każdym razem

a) zwracając,

b) zatrzymując

wybraną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

1) 3 kierów,

2) asa za pierwszym razem.

14. STEREOMETRIA

1. Oblicz objętość i pole całkowite graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego przekątna ma długość równą 5, a obwód podstawy wynosi 10.

2. Stosunek krawędzi podstawy prostopadłościanu wynosi 1:2, a przekątna podstawy wynosi 5. Oblicz objętość tego prostopadłościanu, jeśli jego przekątna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 40^o.

3. Objętość prostopadłościanu o wysokości długości 5 jest równa 180. Przekątna podstawy prostopadłościanu wynosi $2\sqrt{30}$. Oblicz długość krawędzi podstawy prostopadłościanu.

4. Krawędzie podstawy prostopadłościanu mają długości 3 i 6. Wyznacz miarę kąta, jaką przekątna tego prostopadłościanu tworzy z jego podstawą, jeśli objętość prostopadłościanu wynosi $54\sqrt{14}$.

5. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym kąt między ramionami wynosi 120^o, a bok mu przeciwległy ma długość 3 cm. Oblicz wysokość graniastosłupa wiedząc, że pole jego powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw.

6. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 3, wiedząc, że jego ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60^o.

7. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 108 cm², natomiast pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi 72 cm². Oblicz:

a) objętość tego ostrosłupa,

b) miarę kąta między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy.

8. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego równa się $144\sqrt{3}$, a pole jego powierzchni bocznej $96\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

9. Wyznacz miarę kąta między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wiedząc, że pole jego podstawy jest równe $6\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi 12.

10. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

11. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli, jeśli jej przekrój osiowy ma pole równe 16π.

12. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, jeśli jego siatka zawiera prostokąt o bokach długości 2 i 4. Rozważ dwa przypadki.

13. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka o tworzącej długości 4 i kącie rozwarcia o mierze 60^o.

14. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość mają długości odpowiednio 16 cm i 12 cm, przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Oblicz wysokość tego walca.

15. W stożek o średnicy podstawy 12 i kącie rozwarcia 90^o wpisano kulę. Oblicz promień tej kuli.

16. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły powstałej przez obrót trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 6 i kącie ostrym 30^o wokół przeciwprostokątnej.

17. Trapez prostokątny o podstawach 6 i 9 oraz kącie ostrym 45^o obraca się wokół krótszej podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.

ŹRÓDŁA ZADAŃ

1. R. J. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak: "Matematyka krok po kroku. Nowa matura - zbiór zadań cz. I, II", RES POLONA;
2. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak: "Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony", RES POLONA;
3. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak: "Matematyka krok po kroku. Podręcznik dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum, zakres podstawowy", RES POLONA;
4. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak: "Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań dla klasy drugiej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum, zakres podstawowy", RES POLONA;
5. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak: "Matematyka krok po kroku. Podręcznik dla klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum, zakres podstawowy", RES POLONA;
6. R. J. Pawlak, H. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, M. Fabijańczyk: "Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań dla klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum, zakres podstawowy", RES POLONA;
7. M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech: "Matematyka III. Prygotowanie do matury", GWO, Gdańsk 2005;
8. M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech: "Matematyka I. Podręcznik dla liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem", GWO, Gdańsk 2002;
9. M. Braun, M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech: “Matematyka I. Zbiór zadań dla liceum i technikum", GWO, Gdańsk 2002;
10. M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech: "Matematyka II. Podręcznik dla liceum i technikum, zakres podstawowy", GWO, Gdańsk 2003;
11. M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech: "Matematyka II. Podręcznik dla liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem", GWO, Gdańsk 2008;
12. A. Jatczak, M. Ciołkosz, P. Ciołkosz: „Matematyka 1. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum, zakres podstawowy”, OPERON, Gdynia 2007;
13. M. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda: "Matematyka, zbiór zadań do liceów i techników, klasa I, zakres podstawowy i rozszerzony", Ofic. Edukac. - K. Pazdro, Warszawa 2002;
14. E. Świda, K. Kłaczkow, A. Winsztal: "Zdaj maturę. Matematyka, zakres podstawowy i rozszerzony", Ofic. Edukac. - K. Pazdro, Warszawa 2004;
15. E. Artymiuk: "Trening maturzysty, matematyka", GREG
16. Oprac. OKE w Krakowie w porozumieniu z pozostałymi komisjami okręgowymi oraz CKE w Warszawie: "Informator maturzysty. Matematyka, matura 2005", Ofic. Wyd. "Tutor", Warszawa 2003;
17. "Matematyka w Szkole", nr 11, 13, 14, 17;
18. Egzamin maturalny z matematyki z r. szk. 2004/05;
19. Próbne egzaminy maturalne z matematyki z lat szk. 2004/05 - 2006/07;
20. www. lo.olecko.pl
21. www. matematyka.pisz.pl